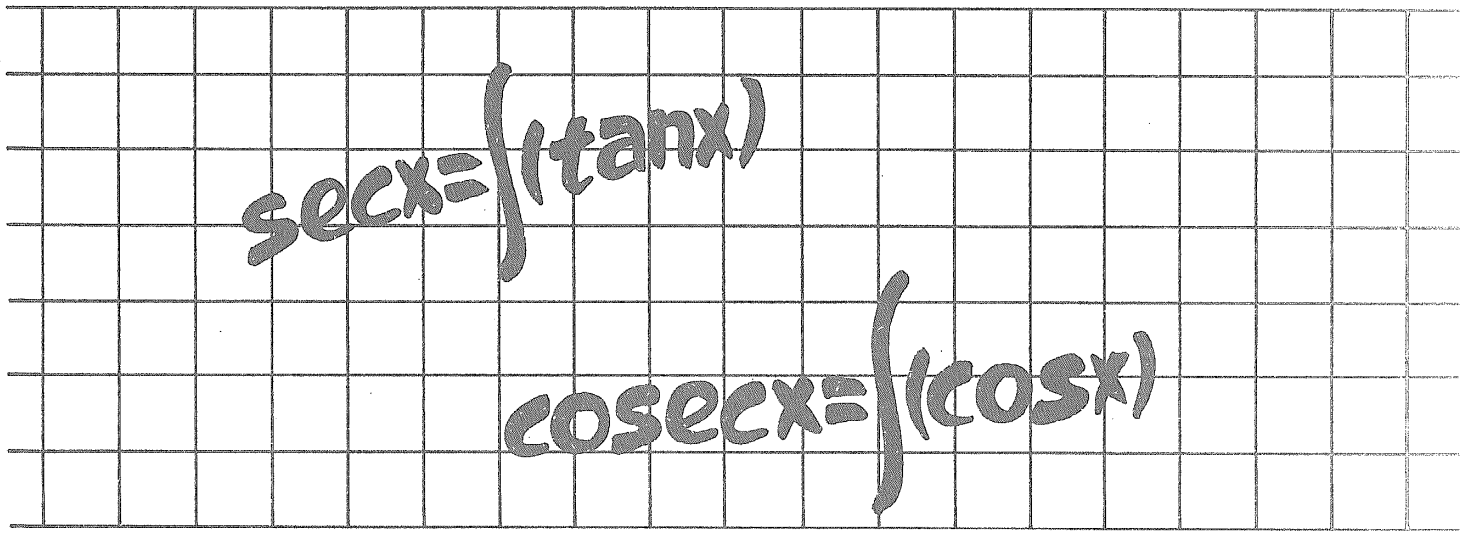
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Obras que integran el bloque 5 (*Trigonometría*)

1. Las razones trigonométricas de un ángulo agudo
2. Resoluciones de triángulos rectos
3. El círculo trigonométrico
4. Las funciones trigonométricas
5. Las funciones trigonométricas inversas
6. Identidades trigonométricas
7. Resolución de triángulos cualesquiera
8. Ecuaciones trigonométricas

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 5

Trigonometría

Módulo 6

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España,
Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.,
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, febrero 1985
ISBN 968-24-0845-8

Impreso en México

Esta obra se terminó de imprimir
el día 28 de febrero de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO ET KC 100

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

6.1 Identidad trigonométrica y ecuación trigonométrica 9

6.2 Funciones de $(\pi/2 \pm x)$, $(\pi \pm x)$, $\frac{3\pi}{2} \pm x$, $(2\pi \pm x)$ y $(-x)$ en términos de las funciones de x 16

6.3 Identidades fundamentales, conteniendo funciones de un sólo ángulo 26

6.4 Cada una de las seis funciones trigonométricas en términos de las cinco restantes 35

6.5 Identidades fundamentales, conteniendo funciones de dos ángulos 47

6.6 Identidades de la suma y diferencia de dos ángulos 62

6.7 Identidades del "ángulo doble" y del "ángulo mitad" 67

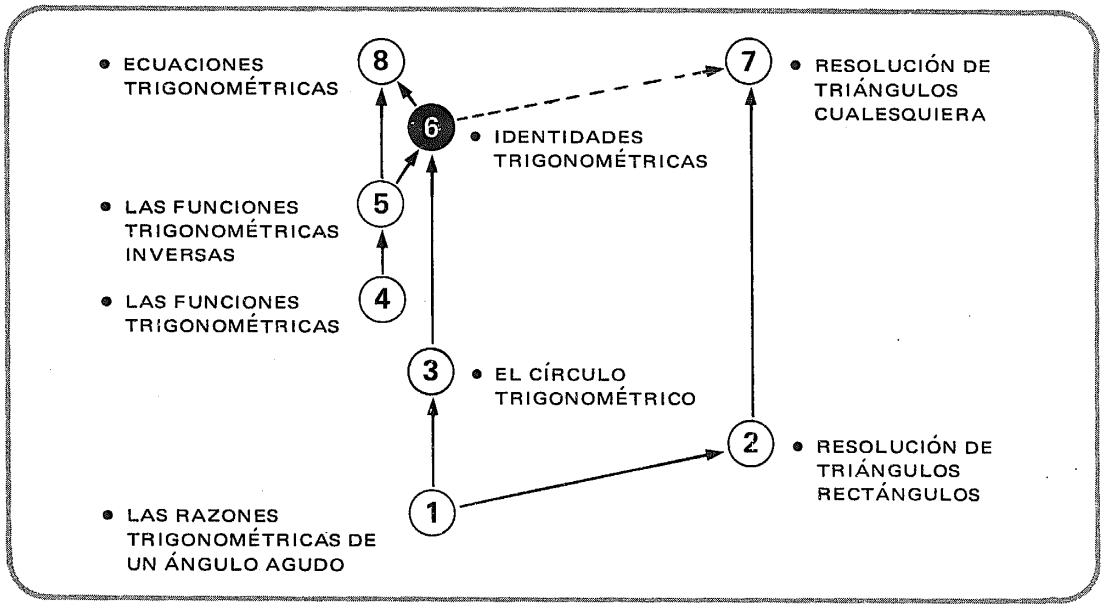
6.8 Identidades de suma y productos 77

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 5. Trigonometría

Objetivos: caracterizar las seis funciones trigonométricas y sus inversas, y aplicar los conocimientos correspondientes a la resolución de problemas prácticos

Esquema estructural del bloque 5



Módulo 6. Identidades trigonométricas

Objetivos: obtener y aplicar algunas de las identidades trigonométricas de uso más frecuente

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Manejo de expresiones algebraicas		
– enteras	1	5, 6, 7, 8, 9
– racionales	1	11
– reales	1	13
• Relación y función (concepto y elementos)	2	7, 8
• Propiedades geométricas de ángulos, triángulos, polígonos convexos y circunferencia	4	3, 4, 5, 6
• Las razones trigonométricas de un ángulo agudo	5	1
• El círculo trigonométrico	5	3
• Las funciones trigonométricas directas e inversas	5	4, 5

6.1

Identidad trigonométrica y ecuación trigonométrica

1

Recordemos que
identidad
es una proposición abierta de igualdad
cuyo
conjunto solución
es igual a
su dominio.

2

Por ejemplo,
el **conjunto solución**
de la proposición abierta
de igualdad

$$x^2 + x = x(x + 1)$$
$$x \in \mathbb{R}$$

es igual a [ ]

por lo tanto tal proposición
es/no es una identidad.

$\mathbb{R}$

es
(ver cuadro siguiente)

3

Observamos que la expresión

$x^2 + x$

ha sido transformada en

$x(x + 1)$

por factorización distributiva.

Cualquier número real que sustituyamos para **x** conduce a una

proposición cerrada verdadera

como podemos comprobarlo fácilmente.

4

El **conjunto solución** de la proposición abierta de igualdad

$$3(x + 5) = 21 \qquad x \in \mathbb{R}$$

es igual a [ ]

por lo tanto, tal proposición **es/no es** una identidad.

2

no es
(ver cuadro siguiente)

5

Para $x = 2$
la proposición $3(x + 5) = 21$
se transforma en $21 = 21$
que es una proposición cerrada verdadera (PCV).
Para cualquier otro número real, la proposición resultante es cerrada falsa (PCF).
Por ejemplo, para $x = 1$
obtenemos $18 = 21$ **PCF**

6

A las proposiciones abiertas de igualdad,
cuyo **conjunto solución** es un **subconjunto propio del dominio**,
les hemos llamado

_____

ecuaciones condicionales

7

Una
identidad trigonométrica
sería una identidad
en la que aparezca
al menos una función
trigonométrica.

8

Una **ecuación trigonométrica**
será
una ecuación condicional,
conteniendo
al menos una función trigonométrica.

9

Señalar la opción correcta.

La expresión

$$\tan x = \frac{1}{2}$$

$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$

es una { identidad / ecuación } trigonométrica,

porque _____

ecuación

su conjunto solución es un subconjunto propio del dominio

10

Señalar la opción correcta.
La expresión

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x}$$

$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

es una { identidad / ecuación } trigonométrica

porque _____

- identidad
- su conjunto solución es igual al dominio, por ejemplo:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\operatorname{cosec}\frac{\pi}{6}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{PCV}$$

(ver cuadro siguiente)

11

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x}$$

es válida
para todos los números reales,
con excepción de los múltiplos de π
(o múltiplos pares de $\pi/2$).

12

En este módulo
nos ocuparemos
de las
identidades trigonométricas.
En un módulo posterior
estudiaremos las
ecuaciones trigonométricas.

13

Consideramos que el
dominio de una **expresión trigonométrica**
es el conjunto de los
números **reales**
para los que
dicha expresión está
definida.

14

Por ejemplo:
el **dominio** de la expresión **sen x**
es

└_____┘

porque

└_____┘

$\mathcal{R}$ (conjunto de todos los números reales)

sen x está definido para todos los números reales

15

El **dominio** de la expresión **cosec x** es

└_____┘

porque

└_____┘

- $\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi\}$ $k \in \mathbb{Z}$
- cosec x está definida para todos los números reales, exceptuando los múltiplos de π (o múltiplos pares de $\pi/2$)

16

¡Atención!

Cuando en una expresión aparece **más de una función** trigonométrica, su **dominio** es igual a **la intersección de los dominios** de las funciones involucradas.

17

¡Atención!

Por ejemplo, el **dominio** de la expresión

$$\textbf{sen x} = \frac{\textbf{1}}{\textbf{cosec x}}$$

es igual a

$$\underbrace{\mathbb{R}}_{\text{dominio de sen x}} \cap \underbrace{\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi\}}_{\text{dominio de cosec x}} = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

5.6.1.1

Práctica adicional de
determinación del dominio
de una
expresión trigonométrica dada,
si se considera necesario.

5.6.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *recordar* los conceptos de ecuación condicional e identidad;
- *discriminar* entre identidades y ecuaciones trigonométricas;
- *dar* el dominio de una expresión conteniendo una función trigonométrica;
- *dar* el dominio de una expresión conteniendo más de una función trigonométrica.

6.2

Funciones de $(\pi/2 \pm x)$, $(\pi \pm x)$,
$\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right)$, $(2\pi \pm x)$ y $(-x)$
en términos de las funciones de x

18

Sabemos que, si x es la medida de un ángulo agudo,
es decir, que
$0 < x < \pi/2$, podemos escribir:

$$\text{sen } (\pi/2 - x) = \underline{\quad\quad}$$
$$\cos (\pi/2 - x) = \underline{\quad\quad}$$
$$\tan (\pi/2 - x) = \underline{\quad\quad}$$
$$\cot (\pi/2 - x) = \underline{\quad\quad}$$
$$\sec (\pi/2 - x) = \underline{\quad\quad}$$
$$\text{cosec } (\pi/2 - x) = \underline{\quad\quad}$$

Hay que recordar que
$(\pi/2 - x)$ es el complemento de x.

cos x
sen x
cot x
tan x
cosec x
sec x

19

Puede probarse que
las expresiones anteriores
se cumplen
para todos los valores de x
para los cuales
las funciones están definidas.

20

Por ejemplo,

$$\text{sen}\,(\pi/2 - x) = \cos x$$

el dominio de cos x es [ ]

el dominio de sen $(\pi/2 - x)$ es [ ]

Atención.

$\{x/x \in \mathbb{R}\}$

$\{(\pi/2 - x)/(\frac{\pi}{2} - x) \in \mathbb{R}\}$
o bien:
$\{x/x \in \mathbb{R}\}$

21

Veamos si $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

se verifica, por ejemplo, para $x = \frac{8\pi}{7}$ $\left(\frac{8\pi}{7} > 0\right)$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{8\pi}{7}\right) = \cos [\quad]$$

En forma simplificada: → sen [ ] = cos [ ]

Valores numéricos: → [ ] = [ ] PCV / PCF

se verifica/no se verifica

$\frac{8\pi}{7}$

$\text{sen} -\frac{9\pi}{14} = \cos\frac{8\pi}{7}$

$-0.9010 = -0.9010$

PCV

se verifica

22

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

Para $x = -2.48$ radianes $[-2.48 < 0]$

$$\text{sen}\left[\frac{\pi}{2} - (-2.48)\right] = \cos(-2.48)$$

$$\text{sen}\left[\frac{\pi}{2} + 2.48\right] = \cos(-2.48)$$

sen [ ] = cos (−2.48)

[ ] = [ ] PCV / PCF

se verifica/no se verifica

4.0508

PCV

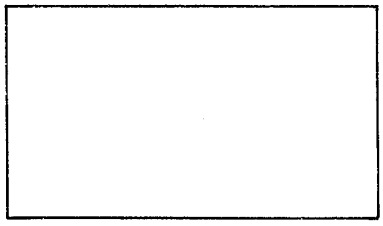
$-0.7890 = -0.7890$

se verifica

23

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

Si $x = 0$



se verifica/no se verifica

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \cos 0$$

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = \cos 0$$

$$1 = 1 \quad \textbf{PCV}$$

se verifica

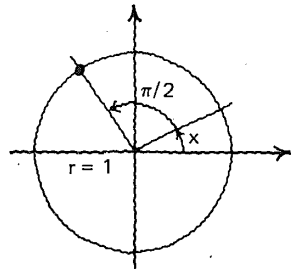
24

Ahora bien,
en el círculo unitario
mostrado, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

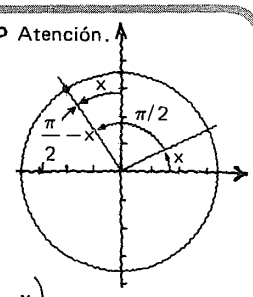
$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \pm\text{sen}\,\square$$

ángulo de referencia

escribir el signo
que corresponda.



Atención.



$\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

el seno es ⊕
en el segundo cuadrante,
por lo tanto:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

ángulo de referencia

25

Hemos encontrado que

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

pero

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \square$$

por lo tanto,

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \square$$

por transitividad

cos x

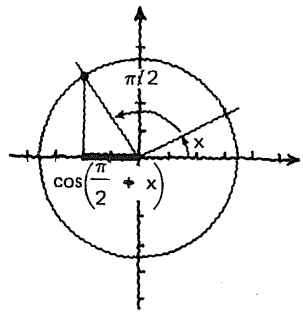
cos x

26

De manera similar,

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=$ [ ] $\cos$ [ ]

+/−



ángulo de referencia

$\bullet - \bullet\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

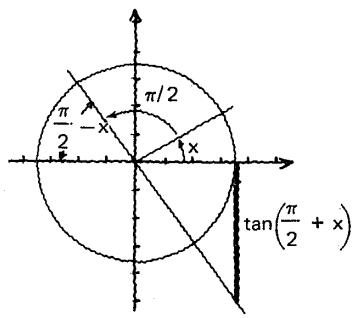
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\text{sen } x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\text{sen } x$

(el coseno es negativo en el segundo cuadrante)

27

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=$ [ ]



ángulo de referencia

$-\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cot x$

28

Completar:

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\text{sen } x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cot x$

$\cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=$ [ ]

$\sec\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=$ [ ]

$\text{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=$ [ ]

$-\tan x$

$-\text{cosec } x$

$\sec x$

29

Estudiar con atención este resumen y las figuras del cuadro siguiente.

atención en los signos

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\qquad$ $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen } x$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\text{sen } x$

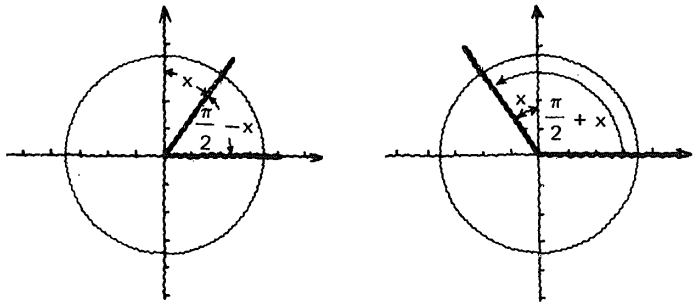
$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$ $\qquad$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$

$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$ $\qquad$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\tan x$

$\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{cosec } x$ $\qquad$ $\sec\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\text{cosec } x$

$\text{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec x$ $\qquad$ $\text{cosec}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sec x$

30



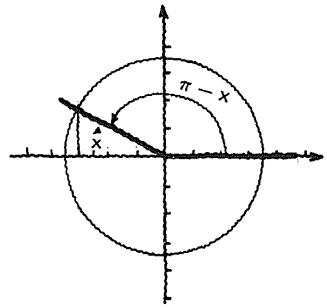
Vamos a permitirnos escribir, en forma abreviada:

$f_t\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{co}f_t(x)$ $\qquad$ $f_t\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \pm\text{co}f_t(x)$

31

Ahora, de acuerdo con la figura,

$\text{sen } (\pi - x) =$ _____



sen x

↑ ángulo de referencia

en el segundo cuadrante el seno es positivo

32

Completar.

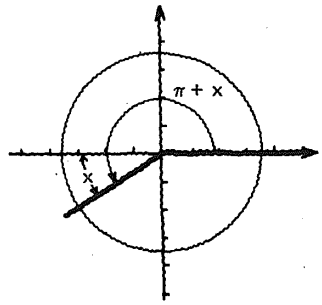
sen $(\pi - x)$ = sen x
cos $(\pi - x)$ = ____
tan $(\pi - x)$ = ____
cot $(\pi - x)$ = ____
sec $(\pi - x)$ = ____
cosec $(\pi - x)$ = ____

— cos x
— tan x
— cot x
— sec x
cosec x

33

Completar.

sen $(\pi + x)$ = ____
cos $(\pi + x)$ = ____
tan $(\pi + x)$ = ____
cot $(\pi + x)$ = ____
sec $(\pi + x)$ = ____
cosec $(\pi + x)$ = ____



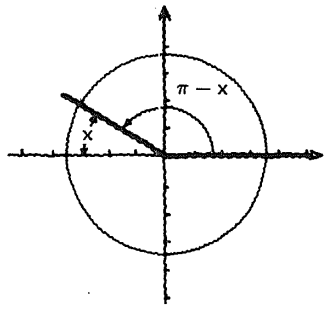
— sen x
— cos x
tan x
cot x
— sec x
— cosec x

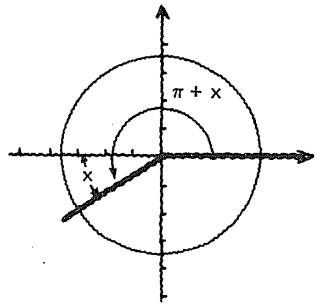
34

Estudiar con atención este cuadro y el siguiente.

sen $(\pi - x)$	= sen x	sen $(\pi + x)$	= — sen x
cos $(\pi - x)$	= — cos x	cos $(\pi + x)$	= — cos x
tan $(\pi - x)$	= — tan x	tan $(\pi + x)$	= tan x
cot $(\pi - x)$	= — cot x	cot $(\pi + x)$	= cot x
sec $(\pi - x)$	= — sec x	sec $(\pi + x)$	= — sec x
cosec $(\pi - x)$	= cosec x	cosec $(\pi + x)$	= — cosec x

35





En forma abreviada:

$f_t(\pi - x) = \pm f_t(x)$ $\qquad$ $f_t(\pi + x) = \pm f_t(x)$

36

Completar.

$\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) =$ ____ $\qquad$ $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) =$ ____

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) =$ ____ $\qquad$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) =$ ____

$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) =$ ____ $\qquad$ $\tan\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) =$ ____

$\cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) =$ ____ $\qquad$ $\cot\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) =$ ____

$\sec\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) =$ ____ $\qquad$ $\sec\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) =$ ____

$\text{cosec}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) =$ ____ $\qquad$ $\text{cosec}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) =$ ____

−cos x $\qquad$ −cos x

−sen x $\qquad$ sen x

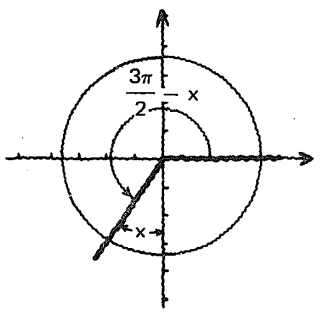
cot x $\qquad$ −cot x

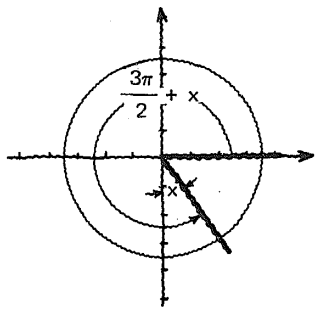
tan x $\qquad$ −tan x

−cosec x $\qquad$ cosec x

−sec x $\qquad$ −sec x

37





Escribamos, en forma abreviada:

1. ____ $\qquad$ 2. ____

- 1. $f_t(\frac{3\pi}{2} - x) = \pm \text{co} f_t(x)$
- 2. $f_t(\frac{3\pi}{2} + x) = \pm \text{co} f_t(x)$

38

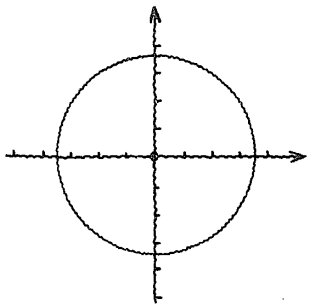
Completar.

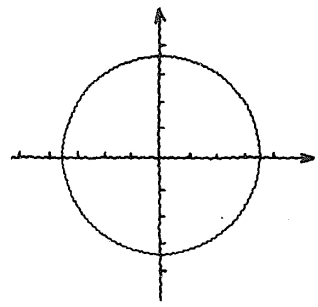
sen $(2\pi - x)$ =		sen $(2\pi + x)$ =	
cos $(2\pi - x)$ =		cos $(2\pi + x)$ =	
tan $(2\pi - x)$ =		tan $(2\pi + x)$ =	
cot $(2\pi - x)$ =		cot $(2\pi + x)$ =	
sec $(2\pi - x)$ =		sec $(2\pi + x)$ =	
cosec $(2\pi - x)$ =		cosec $(2\pi + x)$ =	

$-\text{sen } x$	$\text{sen } x$
$\cos x$	$\cos x$
$-\tan x$	$\tan x$
$-\cot x$	$\cot x$
$\sec x$	$\sec x$
$-\text{cosec } x$	$\text{cosec } x$

39

Completar.

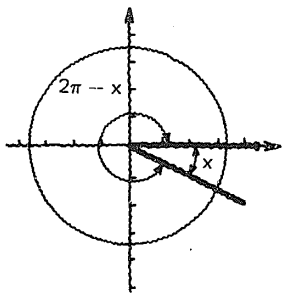


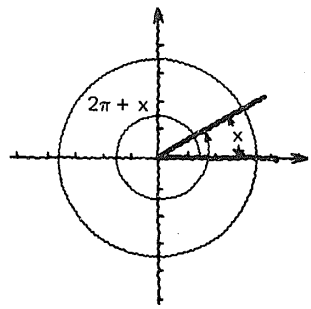


En forma abreviada:

1. ____ 2. ____

Respuesta en el cuadro siguiente



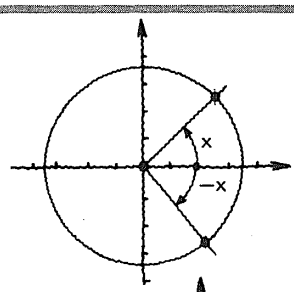


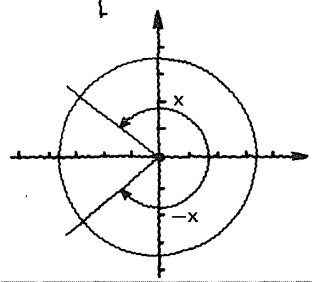
1. $f_t(2\pi - x) = \pm f_t(x)$ 2. $f_t(2\pi + x) = f_t(x)$

40

Completar.

sen (−x) = [ ]
cos (−x) = [ ]
tan (−x) = [ ]
cot (−x) = [ ]
sec (−x) = [ ]
cosec (−x) = [ ]





En forma abreviada:

$f_t(-x)$ = [ ]

−sen x
cos x
−tan x
−cot x
sec x
−cosec x

$\pm f_t(x)$

41

Todas las **expresiones anteriores** son **identidades trigonométricas.** Se verifican para todos los valores de x para los que las funciones involucradas están definidas.

5.6.2.1

Práctica adicional de aplicación de las identidades anteriores, si se considera necesario.

5.6.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *dar* las identidades trigonométricas para funciones de:

  $\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right)$

  $(\pi \pm x)$

  $\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right)$

  $(2\pi \pm x)$

  $(-x)$

  en términos de las funciones de x.

6.3

Identidades fundamentales,
conteniendo
funciones de un sólo ángulo

42

Hemos observado la **reciprocidad**
de las funciones seno y cosecante;
coseno y secante; y tangente y cotangente,
lo cual podemos expresar así:

$\text{sen } x = \square$ $\quad \cot x = \square$

$\cos x = \square$ $\quad \sec x = \square$

$\tan x = \square$ $\quad \operatorname{cosec} x = \square$

$\dfrac{1}{\operatorname{cosec} x}$ $\quad \dfrac{1}{\tan x}$

$\dfrac{1}{\sec x}$ $\quad \dfrac{1}{\cos x}$

$\dfrac{1}{\cot x}$ $\quad \dfrac{1}{\text{sen } x}$

43

$$\text{sen } x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sec x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\tan x = \frac{1}{\cot x} \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

Estas expresiones también son
identidades trigonométricas.
Se cumplen para la intersección de los dominios
de las funciones que intervienen en cada una
de ellas.

44

La identidad trigonométrica

$$\text{sen } x = \frac{1}{\text{cosec } x}$$

puede ser expresada, también, así:

$$\boxed{\qquad\qquad} = 1$$

sen x cosec x

45

Hemos visto que el
dominio de la identidad trigonométrica

$$\text{sen } x = \frac{1}{\text{cosec } x} \quad \text{o} \quad \text{sen } x \text{ cosec } x = 1$$

es:

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

- $\{x/x \in \mathcal{R} \wedge x \neq k\pi\}$ $k \in \mathbb{Z}$

Todos los números reales, excepto los múltiplos de π (o múltiplos pares de $\pi/2$) para los que la cosecante no se define.

46

El dominio de la identidad trigonométrica

$$\text{cos } x = \frac{1}{\text{sec } x} \quad \text{o} \quad \boxed{\qquad\qquad}$$

es $\boxed{\qquad\qquad}$

porque

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

- cos x sec x = 1
- $\left\{x/x \in \mathcal{R} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$ $k \in \mathbb{Z}$
- todos los números reales, exceptuando los múltiplos impares de $\pi/2$

el dominio de cos x es $\mathcal{R}$;
el dominio de sec x es

$$\left\{x/x \in \mathcal{R} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$$

el dominio de cos x sec x deberá ser:

$$\mathcal{R} \cap \{x/x \in \mathcal{R} \wedge x \neq (2k+1)\pi/2\} = \{x/x \in \mathcal{R} \wedge x \neq (2k+1)\pi/2\}$$

En todas las expresiones $k \in \mathbb{Z}$

47

El dominio de la identidad trigonométrica:

$\tan x = \dfrac{1}{\cot x}$ o [ ]

es [ ]

porque

- $\tan x \cot x = 1$
- $\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi/2\}$ $k \in \mathbb{Z}$ todos los reales, excepto los múltiplos de $\pi/2$
- dominio de $\tan x$ es $\left\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right\}$

  dominio de $\cot x$ es $\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi\}$

  dominio de $\tan x \cot x$ es $\left\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right\} \cap \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi\} = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi/2\}$

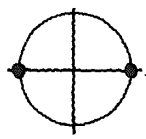
48

Anotemos las tres identidades estudiadas, con sus correspondientes dominios:

$k \in \mathbb{Z}$

sen x cosec x = 1

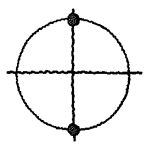
$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi$



las excepciones

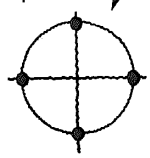
cos x sec x = 1

$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\pi/2$



tanxcotx = 1

$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq \dfrac{k\pi}{2}$



5.6.3.1

Práctica adicional de aplicación de las identidades

$\operatorname{sen} x \operatorname{cosec} x = 1$
$\cos x \sec x = 1$
$\tan x \cot x = 1$

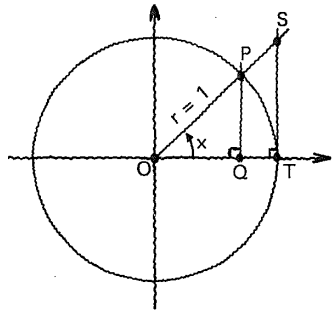
si se considera necesario.

49

Consideremos ahora,
en el círculo unitario,
un ángulo agudo (x)
y los triángulos
rectángulos
OPQ y OST.
Podemos decir que

$\Delta OPQ \sim \Delta OST$

porque

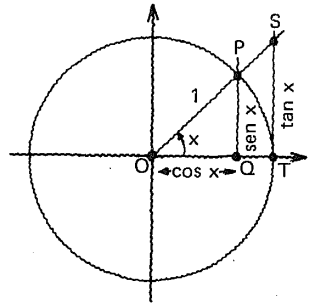


son rectángulos con un ángulo agudo (x) común

50

Siendo semejantes
los triángulos
OPQ y OST,
podemos establecer
la
siguiente proporción:

$$\frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\quad}{\quad}$$



$\frac{\tan x}{1}$ o bien: tan x

radio del círculo

51

Hemos obtenido una importante
identidad trigonométrica,

$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

que aunque la hemos deducido para
$0 < x < \pi/2$
puede probarse que
es válida
para todos los elementos
de su dominio.

52

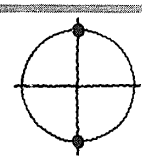
El **dominio** de

$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

es [ ]

porque

[ ]



$\left\{ x/x \in \mathcal{R} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \right\}$

$k \in \mathbb{Z}$

el dominio de sen x es $\mathcal{R}$
el dominio de cos x es $\mathcal{R}$
el dominio de tan x es
$\left\{ x/x \in \mathcal{R} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \right\}$
y este último conjunto es la intersección de los tres

53

$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

Como $\tan x = \dfrac{1}{\cot x}$

$$\frac{1}{\cot x} = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

por lo tanto:

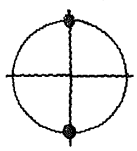
$$\cot x = \frac{[\quad]}{[\quad]}$$

$\dfrac{\cos x}{\text{sen } x}$

54

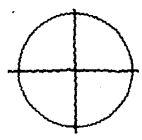
$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

$x \in \mathcal{R} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$



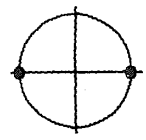
$$\cot x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

$x \in$ [ ]



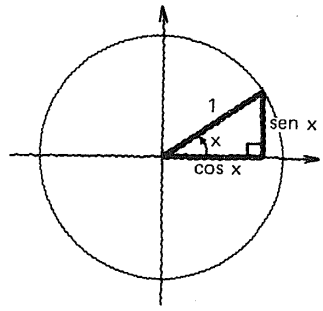
Indicar el dominio y las restricciones en $\mathcal{R}$.

$\{ x/x \in \mathcal{R} \wedge x \neq k\pi \}$ $k \in \mathbb{Z}$



55

De acuerdo con Pitágoras, y en relación con la figura



└──────────┘

Atención.

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\text{sen}^2 x = (\text{sen } x)^2$
$\cos^2 x = (\cos x)^2$

56

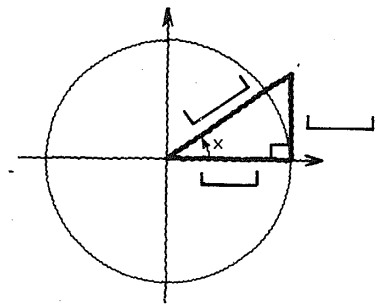
$\textbf{sen}^2 \textbf{x} + \textbf{cos}^2 \textbf{x} = \textbf{1}$

$x \in$ └──┘

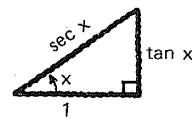
$\mathbb{R}$

57

De acuerdo con Pitágoras:



└──────────┘



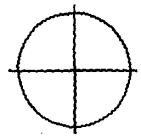
$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

58

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

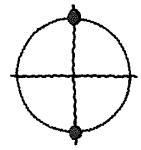
$x \in$ ⌊_____⌋

Indicar dominio
y completar
croquis de restricciones.



$\mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

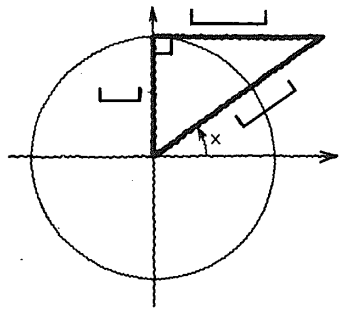
Tanto la tangente como la secante, no se definen para los múltiplos impares de $\pi/2$

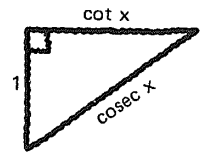


59

De acuerdo
con
Pitágoras:

⌊_____⌋



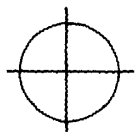


$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

60

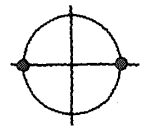
$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

$x \in$ ⌊_____⌋



$\mathbb{R} \wedge x \neq k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

Tanto la cotangente como la cosecante no están definidas para los múltiplos de π (o múltiplos pares de $\pi/2$).



61

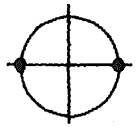
A estas tres identidades:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{sen^2 x + cos^2 x = 1} & x \in \mathbb{R} \\ \mathbf{1 + tan^2 x = sec^2 x} & x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ \mathbf{1 + cot^2 x = cosec^2 x} & x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi \end{array}\right\} k \in \mathbb{Z}$$

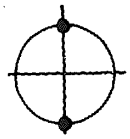
se les llama
identidades pitagóricas.

62

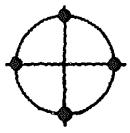
Resumen 7. Identidades trigonométricas.



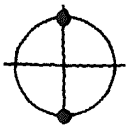
1. **sen x cosec x = 1** • $x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi$



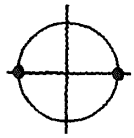
2. **cos x sec x = 1** • $x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$



3. **tan x cot x = 1** • $x \in \mathbb{R} \wedge x \neq \frac{k\pi}{2}$



4. **tan x = sen x/cos x** • $x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$



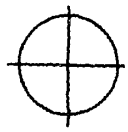
5. **cot x = cos x/sen x** • $x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

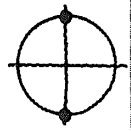
63

Resumen 8. Identidades trigonométricas pitagóricas.

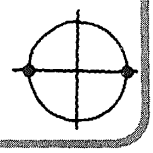
6. $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ • $x \in \mathbb{R}$



7. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ • $x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$



8. $1 + \cot^2 x = \text{cosec}^2 x$ • $x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi$
$k \in \mathbb{Z}$



5.6.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* las dos identidades trigonométricas:
  $\tan x = \text{sen } x/\cos x$ y $\cot x = \cos x/\text{sen } x$
  indicando sus dominios;

- *obtener* las identidades pitagóricas:
  $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
  $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
  $1 + \cot^2 x = \text{cosec}^2 x$
  indicando sus dominio.

6.4

Cada una de las seis funciones trigonométricas en términos de cada una de las cinco restantes

64

Las ocho identidades trigonométricas que hemos obtenido nos permiten expresar **cada una de las seis funciones trigonométricas en términos de cada una de las cinco restantes.**

65

Empecemos por expresar "el seno en función del coseno", es decir,

$$\text{sen } x = f(\cos x)$$

66

$\text{sen } x = f(\cos x) = ?$

Para encontrar una expresión equivalente a sen x, expresada únicamente en términos de cos x, seleccionamos una identidad que contenga a **sen x** y **cos x**, como únicas funciones trigonométricas.

[_____]

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

67

$\text{sen } x = f(\cos x) = ?$

Enseguida,
de $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
despejamos sen x:

$\text{sen}^2 x =$ [_____]

$\text{sen } x =$ [_____]

$1 - \cos^2 x$

$\pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$

68

En esta forma, logramos expresar **sen x** en función de **cos x**:

$$\textbf{sen } x = \pm\sqrt{\mathbf{1 - \cos^2 x}} \qquad x \in \mathcal{R}$$

69

En forma similar,
podemos obtener

$$\cos x = f(\text{sen } x)$$

Identidad tomada
como punto de partida:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

70

$$\cos x = f(\text{sen } x) = ?$$

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$

$\cos x = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2 x}$

71

Se requiere, ahora, obtener

$$\sec x = f(\tan x)$$

Identidad de partida:

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

72

sec x = f(tan x) = ?

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$
$$\downarrow$$
$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$
$$\downarrow$$
$$\sec x = \square$$

$\pm\sqrt{1 + \tan^2 x}$

73

Obtener

tan x = f(sec x)

$$\tan x = \square$$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$\pm\sqrt{\sec^2 x - 1}$

74

Obtener

cosec x = f(cot x)

$$\text{cosec } x = \square$$

$1 + \cot^2 x = \text{cosec}^2 x$

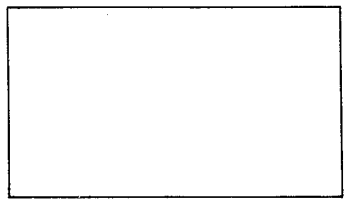
$\text{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x$

$\pm\sqrt{1 + \cot^2 x}$

75

Obtener

$$\cot x = f(\operatorname{cosec} x)$$



$$\cot x = \boxed{\qquad\qquad}$$

$$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

$$\cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$$

$$\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x - 1}$$

76

Ahora, organicemos en una tabla los resultados obtenidos.

Respuesta en el cuadro siguiente

	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	cosec x
sen x	sen x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$				
cos x	$\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$	cos x				
tan x			tan x		$\pm\sqrt{\sec^2 x - 1}$	
cot x				cot x		$\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x - 1}$
sec x			$\pm\sqrt{1+\tan^2 x}$		sec x	
cosec x				$\pm\sqrt{1+\cot^2 x}$		cosec x

Estamos en condiciones de llenar los casilleros en blanco.

77

	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	cosec x
sen x	sen x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$				1/cosec x
cos x	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}$	cos x			1/sec x	
tan x			tan x	1/cot x	$\pm\sqrt{\sec^2 x-1}$	
cot x			1/tan x	cot x		$\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}$
sec x		1/cos x	$\pm\sqrt{1+\tan^2 x}$		sec x	
cosec x	1/sen x			$\pm\sqrt{1+\cot^2 x}$		cosec x

Obtener **tan x = f (sen x)**.

Por ejemplo:

$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

pero

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}$$

por lo tanto,

$$\textbf{tan x} = \frac{\textbf{sen x}}{\pm\sqrt{\textbf{1}-\textbf{sen}^2\textbf{x}}}$$

78

	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	cosec x
sen x	sen x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$				1/cosec x
cos x	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}$	cos x			1/sec x	
tan x	$\frac{\text{sen } x}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$		tan x	1/cot x	$\pm\sqrt{\sec^2 x-1}$	
cot x			1/tan x	cot x		$\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}$
sec x		1/cos x	$\pm\sqrt{1+\tan^2 x}$		sec x	
cosec x	1/sen x			$\pm\sqrt{1+\cot^2 x}$		cosec x

Obtener **tan x = f (cos x)**.

Por ejemplo:

$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

pero

$$\text{sen } x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$$

$$\textbf{tan x} = \frac{\pm\sqrt{\textbf{1}-\textbf{cos}^2\textbf{x}}}{\textbf{cos x}}$$

79

	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	cosec x
sen x	sen x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$				1/cosec x
cos x	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}$	cos x			1/sec x	
tan x	$\frac{\text{sen } x}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	tan x	1/cot x	$\pm\sqrt{\sec^2 x-1}$	
cot x			1/tan x	cot x		$\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}$
sec x		1/cos x	$\pm\sqrt{1+\tan^2 x}$		sec x	
cosec x	1/sen x			$\pm\sqrt{1+\cot^2 x}$		cosec x

Obtener **cot x = f (sen x)**.

Por ejemplo:

$$\cot x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

pero

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}$$

entonces

$$\textbf{cot x} = \frac{\pm\sqrt{\textbf{1}-\textbf{sen}^2\textbf{x}}}{\textbf{sen x}}$$

80

	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	cosec x
sen x	sen x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$				1/cosec x
cos x	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}$	cos x			1/sec x	
tan x	$\frac{\text{sen } x}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	tan x	1/cot x	$\pm\sqrt{\sec^2 x-1}$	
cot x	$\frac{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}{\text{sen } x}$		1/tan x	cot x		$\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}$
sec x		1/cos x	$\pm\sqrt{1+\tan^2 x}$		sec x	
cosec x	1/sen x			$\pm\sqrt{1+\cot^2 x}$		cosec x

Obtener **cot x = f(cos x).**

Por ejemplo:

$$\cot x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

pero

$$\text{sen } x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$$

luego

$$\mathbf{\cot x = \frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}}$$

81

	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	cosec x
sen x	sen x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$				1/cosec x
cos x	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}$	cos x			1/sec x	
tan x	$\frac{\text{sen } x}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	tan x	1/cot x	$\pm\sqrt{\sec^2 x-1}$	
cot x	$\frac{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}{\text{sen } x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	1/tan x	cot x		$\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}$
sec x		1/cos x	$\pm\sqrt{1+\tan^2 x}$		sec x	
cosec x	1/sen x			$\pm\sqrt{1+\cot^2 x}$		cosec x

Obtener **sec x = f(sen x).**

Por ejemplo:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

pero $\cos x = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}$

entonces;

$$\mathbf{\sec x = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}}$$

82

	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	cosec x
sen x	sen x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$				1/cosec x
cos x	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}$	cos x			1/sec x	
tan x	$\frac{\text{sen } x}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	tan x	1/cot x	$\pm\sqrt{\sec^2 x-1}$	
cot x	$\frac{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}{\text{sen } x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	1/tan x	cot x		$\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}$
sec x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	1/cos x	$\pm\sqrt{1+\tan^2 x}$		sec x	
cosec x	1/sen x			$\pm\sqrt{1+\cot^2 x}$		cosec x

Obtener **cosec x = f(cos x).**

Por ejemplo:

$$\text{cosec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

pero $\text{sen } x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$

por lo tanto

$$\mathbf{\text{cosec } x = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}}$$

83

	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	cosec x
sen x	sen x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$				1/cosec x
cos x	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}$	cos x			1/sec x	
tan x	$\frac{\text{sen } x}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	tan x	1/cot x	$\pm\sqrt{\sec^2 x-1}$	
cot x	$\frac{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}{\text{sen } x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	1/tan x	cot x		$\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}$
sec x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	1/cos x	$\pm\sqrt{1+\tan^2 x}$		sec x	
cosec x	1/sen x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$		$\pm\sqrt{1+\cot^2 x}$		cosec x

Obtener **sen x = f(tan x).**

Por ejemplo:

$\tan x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$

sen x = tanx cosx

pero $\cos x = \dfrac{1}{\sec x}$

de donde: $\text{sen } x = \dfrac{\tan x}{\sec x}$

pero, $\sec x = \pm\sqrt{1+\tan^2 x}$

luego

$$\textbf{sen } x = \frac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

84

	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	cosec x
sen x	sen x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$			1/cosec x
cos x	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}$	cos x			1/sec x	
tan x	$\frac{\text{sen } x}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	tan x	1/cot x	$\pm\sqrt{\sec^2 x-1}$	
cot x	$\frac{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}{\text{sen } x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	1/tan x	cot x		$\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}$
sec x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	1/cos x	$\pm\sqrt{1+\tan^2 x}$		sec x	
cosec x	1/sen x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$		$\pm\sqrt{1+\cot^2 x}$		cosec x

Obtener **cosec x = f(tan x).**

Por ejemplo:

$\text{sen } x = \dfrac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$

$\text{cosec } x = \dfrac{1}{\text{sen } x}$

por lo tanto:

$\text{cosec } x = \dfrac{1}{\dfrac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}}$

o bien

$$\textbf{cosec } x = \frac{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}{\tan x}$$

85

	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	cosec x
sen x	sen x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$			1/cosec x
cos x	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}$	cos x			1/sec x	
tan x	$\frac{\text{sen } x}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	tan x	1/cot x	$\pm\sqrt{\sec^2 x-1}$	
cot x	$\frac{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}{\text{sen } x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	1/tan x	cot x		$\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}$
sec x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	1/cos x	$\pm\sqrt{1+\tan^2 x}$		sec x	
cosec x	1/sen x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}{\tan x}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2 x}$		cosec x

Obtener **sen x = f(cot x).**

Por ejemplo:

$\text{cosec } x = \pm\sqrt{1+\cot^2 x}$

pero $\text{sen } x = \dfrac{1}{\text{cosec } x}$

entonces:

$$\textbf{sen } x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2 x}}$$

86

	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	cosec x
sen x	sen x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2 x}}$		1/cosec x
cos x	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}$	cos x			1/sec x	
tan x	$\frac{\text{sen } x}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	tan x	1/cot x	$\pm\sqrt{\sec^2 x-1}$	
cot x	$\frac{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}{\text{sen } x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	1/tan x	cot x		$\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}$
sec x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	1/cos x	$\pm\sqrt{1+\tan^2 x}$		sec x	
cosec x	1/sen x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}{\tan x}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2 x}$		cosec x

Obtener **cosec x = f(sec x).**

Por ejemplo:

$$\text{cosec } x = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$$

pero $\cos x = \frac{1}{\sec x}$ de donde:

$$\text{cosec } x = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\frac{1}{\sec^2 x}}}$$

$$\text{cosec } x = \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{\sec^2 x-1}{\sec^2 x}}}$$

$$\text{cosec } x = \frac{1}{\frac{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}{\sec x}}$$

$$\textbf{cosec } x = \frac{\sec x}{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}$$

87

	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	cosec x
sen x	sen x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2 x}}$		1/cosec x
cos x	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}$	cos x			1/sec x	
tan x	$\frac{\text{sen } x}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	tan x	1/cot x	$\pm\sqrt{\sec^2 x-1}$	
cot x	$\frac{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}{\text{sen } x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	1/tan x	cot x		$\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}$
sec x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	1/cos x	$\pm\sqrt{1+\tan^2 x}$		sec x	
cosec x	1/sen x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}{\tan x}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2 x}$	$\frac{\sec x}{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}$	cosec x

Obtener **sen x = f(sec x).**

Por ejemplo:

$$\text{cosec } x = \frac{\sec x}{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}$$

de donde:

$$\textbf{sen } x = \frac{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}{\sec x}$$

88

	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	cosec x
sen x	sen x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}{\sec x}$	1/cosec x
cos x	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}$	cos x			1/sec x	
tan x	$\frac{\text{sen } x}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	tan x	1/cot x	$\pm\sqrt{\sec^2 x-1}$	
cot x	$\frac{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}{\text{sen } x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	1/tan x	cot x		$\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}$
sec x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	1/cos x	$\pm\sqrt{1+\tan^2 x}$		sec x	
cosec x	1/sen x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}{\tan x}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2 x}$	$\frac{\sec x}{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}$	cosec x

Obtener **cos x = f(tan x).**

Por ejemplo:

$$\sec x = \pm\sqrt{1+\tan^2 x}$$

por lo tanto:

$$\textbf{cos } x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

89

	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	cosec x
sen x	sen x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}{\sec x}$	1/cosec x
cos x	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}$	cos x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$		1/sec x	
tan x	$\frac{\text{sen } x}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	tan x	1/cot x	$\pm\sqrt{\sec^2 x-1}$	
cot x	$\frac{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}{\text{sen } x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	1/tan x	cot x		$\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}$
sec x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	1/cos x	$\pm\sqrt{1+\tan^2 x}$		sec x	
cosec x	1/sen x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}{\tan x}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2 x}$	$\frac{\sec x}{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}$	cosec x

Obtener **cot = f(sec x).**

Por ejemplo:

$\tan x = \pm\sqrt{\sec^2 x - 1}$

$$\cot x = \frac{1}{\pm\sqrt{\sec^2 x - 1}}$$

90

	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	cosec x
sen x	sen x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}{\sec x}$	1/cosec x
cos x	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}$	cos x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$		1/sec x	
tan x	$\frac{\text{sen } x}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	tan x	1/cot x	$\pm\sqrt{\sec^2 x-1}$	
cot x	$\frac{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}{\text{sen } x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	1/tan x	cot x	$\frac{1}{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}$	$\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}$
sec x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	1/cos x	$\pm\sqrt{1+\tan^2 x}$		sec x	
cosec x	1/sen x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}{\tan x}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2 x}$	$\frac{\sec x}{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}$	cosec x

Obtener **sec x = f(cot x).**

Por ejemplo:

$\sec x = \pm\sqrt{1+\tan^2 x}$

$\sec x = \pm\sqrt{1+\frac{1}{\cot^2 x}}$

$\sec x = \pm\sqrt{\frac{\cot^2 x+1}{\cot^2 x}}$

$$\sec x = \pm\frac{\sqrt{\cot^2 x+1}}{\cot x}$$

91

	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	cosec x
sen x	sen x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}{\sec x}$	1/cosec x
cos x	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}$	cos x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$		1/sec x	
tan x	$\frac{\text{sen } x}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	tan x	1/cot x	$\pm\sqrt{\sec^2 x-1}$	
cot x	$\frac{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}{\text{sen } x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	1/tan x	cot x	$\frac{1}{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}$	$\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}$
sec x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	1/cos x	$\pm\sqrt{1+\tan^2 x}$	$\frac{\pm\sqrt{\cot^2 x+1}}{\cot x}$	sec x	
cosec x	1/sen x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}{\tan x}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2 x}$	$\frac{\sec x}{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}$	cosec x

Obtener **cos x = f(cot x).**

Por ejemplo:

$$\sec x = \frac{\pm\sqrt{\cot^2 x+1}}{\cot x}$$

$$\cos x = \frac{\cot x}{\pm\sqrt{\cot^2 x+1}}$$

92

	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	cosec x
sen x	sen x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}{\sec x}$	1/cosec x
cos x	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}$	cos x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\frac{\cot x}{\pm\sqrt{\cot^2 x+1}}$	1/sec x	
tan x	$\frac{\text{sen } x}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	tan x	1/cot x	$\pm\sqrt{\sec^2 x-1}$	
cot x	$\frac{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}{\text{sen } x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	1/tan x	cot x	$\frac{1}{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}$	$\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}$
sec x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	1/cos x	$\pm\sqrt{1+\tan^2 x}$	$\frac{\pm\sqrt{\cot^2 x+1}}{\cot x}$	sec x	
cosec x	1/sen x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}{\tan x}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2 x}$	$\frac{\sec x}{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}$	cosec x

Obtener **cos x = f (cosec x).**

Por ejemplo:

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}$$

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\frac{1}{\text{cosec}^2 x}}$$

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{\text{cosec}^2 x-1}{\text{cosec}^2 x}}$$

$$\mathbf{\cos x = \frac{\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}}{\text{cosec } x}}$$

93

	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	cosec x
sen x	sen x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}{\sec x}$	1/cosec x
cos x	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}$	cos x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\frac{\cot x}{\pm\sqrt{\cot^2 x+1}}$	1/sec x	$\frac{\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}}{\text{cosec } x}$
tan x	$\frac{\text{sen } x}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	tan x	1/cot x	$\pm\sqrt{\sec^2 x-1}$	
cot x	$\frac{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}{\text{sen } x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	1/tan x	cot x	$\frac{1}{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}$	$\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}$
sec x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	1/cos x	$\pm\sqrt{1+\tan^2 x}$	$\frac{\pm\sqrt{\cot^2 x+1}}{\cot x}$	sec x	
cosec x	1/sen x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}{\tan x}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2 x}$	$\frac{\sec x}{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}$	cosec x

Obtener **sec x = f (cosec x).**

Por ejemplo:

$$\cos x = \frac{\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}}{\text{cosec } x}$$

$$\mathbf{\sec x = \frac{\text{cosec } x}{\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}}}$$

94

	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	cosec x
sen x	sen x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}{\sec x}$	1/cosec x
cos x	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}$	cos x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\frac{\cot x}{\pm\sqrt{\cot^2 x+1}}$	1/sec x	$\frac{\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}}{\text{cosec } x}$
tan x	$\frac{\text{sen } x}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	tan x	1/cot x	$\pm\sqrt{\sec^2 x-1}$	
cot x	$\frac{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}{\text{sen } x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	1/tan x	cot x	$\frac{1}{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}$	$\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}$
sec x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	1/cos x	$\pm\sqrt{1+\tan^2 x}$	$\frac{\pm\sqrt{\cot^2 x+1}}{\cot x}$	sec x	$\frac{\text{cosec } x}{\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}}$
cosec x	1/sen x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}{\tan x}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2 x}$	$\frac{\sec x}{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}$	cosec x

Obtener **tan x = f (cosec x).**

Por ejemplo:

$$\cot x = \pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}$$

$$\mathbf{\tan x = \frac{1}{\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}}}$$

95

Resumen 9. Identidades trigonométricas.

	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	cosec x
sen x	sen x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}{\sec x}$	1/cosec x
cos x	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}$	cos x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\frac{\cot x}{\pm\sqrt{\cot^2 x+1}}$	1/sec x	$\frac{\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}}{\text{cosec } x}$
tan x	$\frac{\text{sen } x}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	tan x	1/cot x	$\pm\sqrt{\sec^2 x-1}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}}$
cot x	$\frac{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}{\text{sen } x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	1/tan x	cot x	$\frac{1}{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}$	$\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}$
sec x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$	1/cos x	$\pm\sqrt{1+\tan^2 x}$	$\frac{\pm\sqrt{\cot^2 x+1}}{\cot x}$	sec x	$\frac{\text{cosec } x}{\pm\sqrt{\text{cosec}^2 x-1}}$
cosec x	1/sen x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}{\tan x}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2 x}$	$\frac{\sec x}{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}$	cosec x

5.6.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* cada una de las seis funciones trigonométricas en términos de cada una de las cinco restantes.

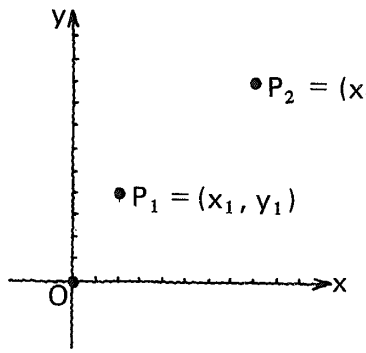
6.5

Identidades fundamentales, conteniendo funciones de dos ángulos

96

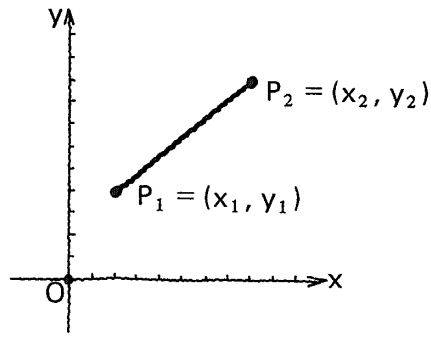
Consideremos un sistema cartesiano, en que aparecen representados dos puntos:

$P_1 = (x_1, y_1)$
y
$P_2 = (x_2, y_2)$



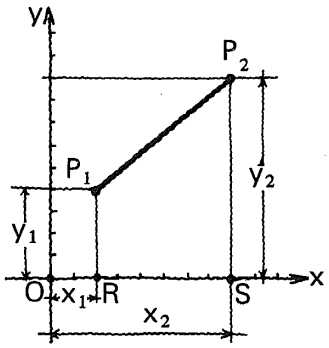
97

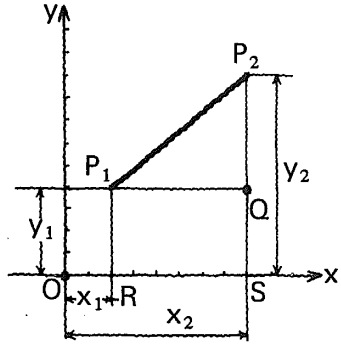
La distancia entre los puntos P_1 y P_2 es la medida $\overline{P_1P_2}$ del segmento P_1P_2. Vamos a proponernos obtener una expresión para el cálculo de esta distancia.



98

Tracemos
$\overrightarrow{P_1Q}$
tal que
$\overleftrightarrow{P_1Q} \parallel \overleftrightarrow{RS}$
y
$\{Q\} = \overleftrightarrow{P_1Q} \cap \overleftrightarrow{P_2S}$





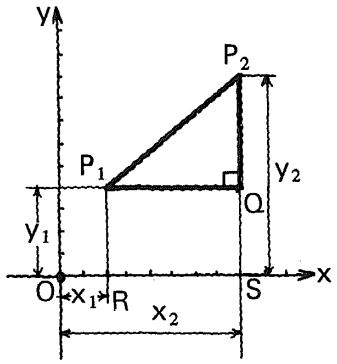
99

En el triángulo rectángulo
P_1P_2Q:

$|\overrightarrow{P_1Q}| = |\overrightarrow{RS}| = x_2 - x_1$

Similarmente,

$|\overrightarrow{P_2Q}| =$ ⌊_____⌋

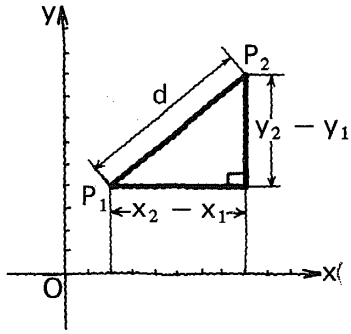


$y_2 - y_1$

100

De acuerdo
con
Pitágoras,

$d = |\overrightarrow{P_1P_2}| =$ ⌊_____⌋



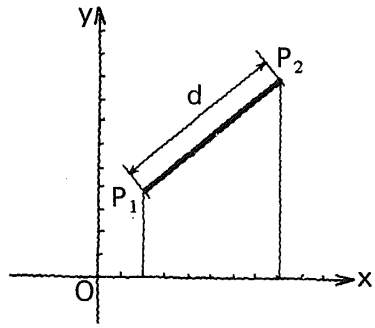
$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

101

Por medio de la expresión

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

podemos determinar la distancia $d = |\overrightarrow{P_1 P_2}|$ entre dos puntos dados por sus coordenadas.



102

Por ejemplo,
la distancia **d** entre los puntos

$P_1 = (2, 3)$
y
$P_2 = (8, 5)$

es d = [ ]

[ ] unidades de longitud.

$\sqrt{(8-2)^2 + (5-3)^2}$

$\sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 4}$

$\sqrt{40} \doteq 6.32$

103

La distancia **d** entre los puntos

$A = (-2, -6)$
y
$B = (3, 7)$

es d = [ ]

[ ]

- $\sqrt{[3 - (-2)]^2 + [7 - (-6)]^2}$
- $\sqrt{(3 + 2)^2 + (7 + 6)^2}$
- $\sqrt{5^2 + 13^2} = \sqrt{25 + 169}$

- $\sqrt{194} \doteq 13.93$

5.6.5.1

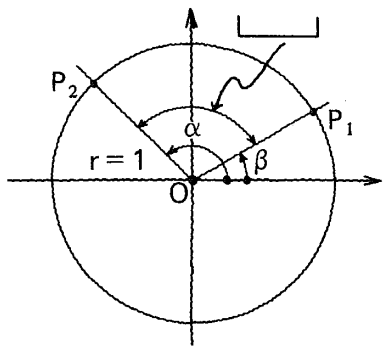
Práctica adicional,
si
se considera necesario.

104

Consideremos,
ahora, el

círculo unitario

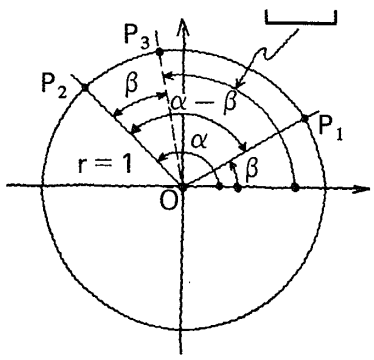
y dos ángulos cualesquiera
α y β.
Indicar la medida
del
ángulo señalado.



$\alpha - \beta$

105

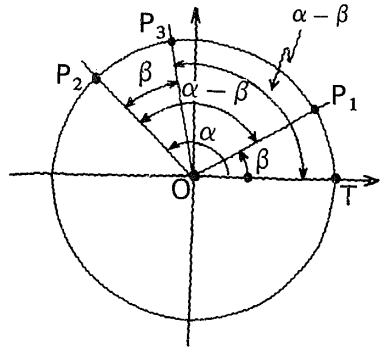
Hemos
trazado
el $<P_2OP_3$
de tal manera
que
$\measuredangle P_2OP_3 = \beta$
Indicar la medida
del
ángulo señalado.



$\alpha - \beta$

106

Tracemos las cuerdas $\overleftrightarrow{TP_3}$ y $\overleftrightarrow{P_1P_2}$

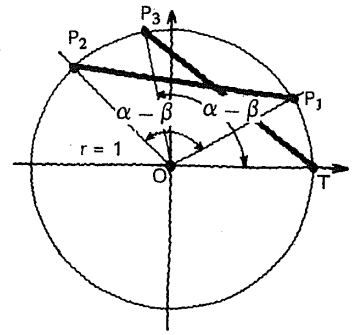


Respuesta en el cuadro siguiente.

Las cuerdas $\overleftrightarrow{TP_3}$ y $\overleftrightarrow{P_1P_2}$

son/no son

congruentes, porque



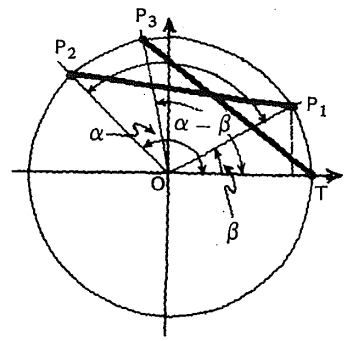
- son
- los triángulos OTP_3 y OP_1P_2 son congruentes, porque
  $\overleftrightarrow{OT} \cong \overleftrightarrow{OP_1}$ (son radios)
  $\overleftrightarrow{OP_3} \cong \overleftrightarrow{OP_2}$ (son radios)
  $\angle TOP_3 \cong \angle P_1OP_2$
  criterio de congruencia LAL
  por lo tanto:
  $\overleftrightarrow{TP_3} \cong \overleftrightarrow{P_1P_2}$
  porque son homólogos

107

¡Atención!

Tratándose de un círculo unitario, las coordenadas de P_1 son

(____ , ____)

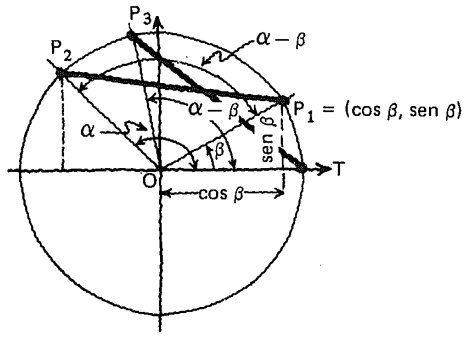


(cos β, sen β)

108

Las coordenadas de P_2 son

$(\_\_\_\_, \_\_\_\_)$

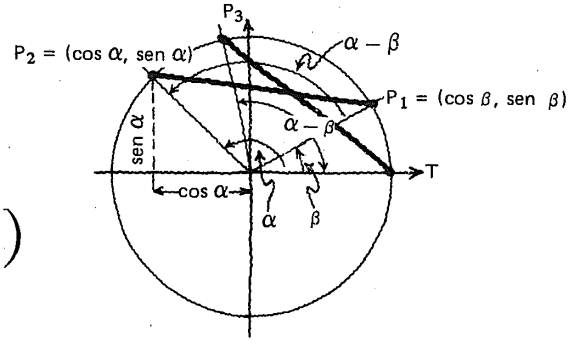


(cos α, sen α)

109

Las coordenadas de P_3 son

$(\_\_\_\_, \_\_\_\_)$

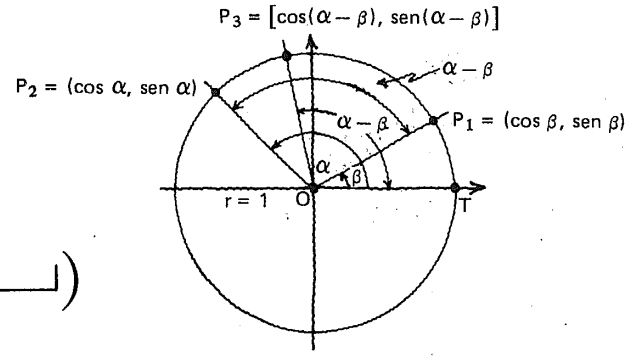


[cos(α − β), sen(α − β]

110

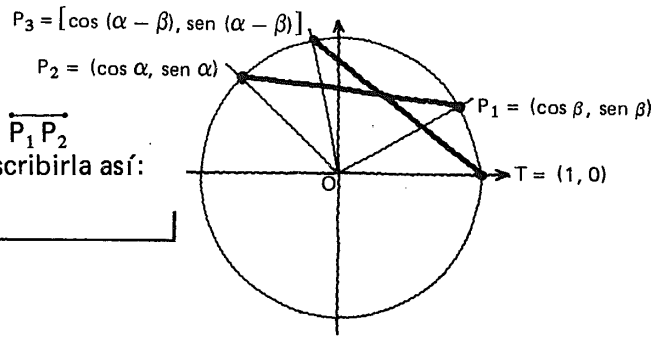
Las coordenadas de T son

$(\_\_\_\_, \_\_\_\_)$



(1, 0)

111

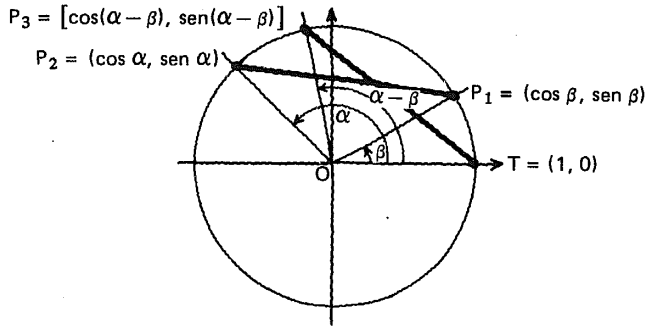


Entonces,
la distancia $\overrightarrow{P_1 P_2}$
podemos escribirla así:

$|\overrightarrow{P_1 P_2}| =$ [ ]

$\sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta)^2}$

112



$|\overrightarrow{P_1 P_2}| = \sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta)^2}$

$|\overrightarrow{TP_3}| =$ [ ]

$\sqrt{[\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + [\operatorname{sen}(\alpha - \beta)]^2}$

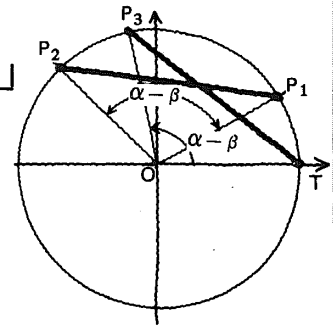
113

$|\overrightarrow{P_1 P^2}| = \sqrt{\cos d - \cos \beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen} \beta)^2}$

$|\overrightarrow{T P_3}| = \sqrt{[\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + [\operatorname{sen}(\alpha - \beta)^2}$

Puesto que hemos aceptado que las cuerdas
$\overrightarrow{P_1 P_2}$ y $\overrightarrow{TP_3}$ son congruentes:

[ ]



Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$\sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2}$$

$$= \sqrt{[\cos(\alpha-\beta) - 1]^2 + \operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)}$$

Nos propondremos **simplificar** esta expresión. Empezaremos por elevar al cuadrado los dos miembros:

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta]^2$$
$$= [\cos(\alpha-\beta) - 1]^2 + \operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)$$

114

Desarrollamos los dos binomios del primer miembro.

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2$$
$$= [\cos(\alpha-\beta) - 1]^2 + \operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)$$

$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 = \underline{\qquad\qquad}$ $\qquad \cos^2 - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta$

$(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2 = \underline{\qquad\qquad}$ $\qquad \operatorname{sen}^2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}^2\beta$

115

$$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\alpha$$
$$- 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}^2\beta = [\cos(\alpha-\beta) - 1]^2 + \operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)$$

De acuerdo con una de las identidades pitagóricas:

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \underline{\qquad}$ $\qquad 1$

$\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = \underline{\qquad}$ $\qquad 1$

Por lo tanto, nuestra igualdad se transforma en:

$$2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$= [\cos(\alpha-\beta) - 1]^2 + \operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)$$

116

$2-2\cos\alpha\cos\beta-2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = [\cos(\alpha-\beta)-1]^2+\operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)$

Factorizando el 1er miembro, obtenemos:

$\boxed{\qquad\qquad} = [\cos(\alpha-\beta)-1]^2+\operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)$

$2[1-\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta]$

117

$2[1-\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) = [\cos(\alpha-\beta)-1]^2+\operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)$

Desarrollamos el binomio del segundo miembro.

$\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1$

118

$2[1-\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta] = \cos^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1+\operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)$

Por la misma identidad pitagórica considerada antes,

$\cos^2(\alpha-\beta)+\operatorname{sen}^2(\alpha-\beta) = \boxed{\quad}$

Por lo tanto,

$2[1-\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta] = \boxed{\qquad\qquad}$

1

- $1-2\cos(\alpha-\beta)+1$
  o bien
  $2-2\cos(\alpha-\beta)$

119

$2[1 - \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta] = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$

Factorizando el segundo miembro:

$2[1 - \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta] =$ ⌊_____⌋

$2[1 - \cos(\alpha - \beta)]$

120

$2[1 - \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta] = 2[1 - \cos(\alpha - \beta)]$

Multiplicando por $\frac{1}{2}$ ambos miembros:

⌊_____⌋

$1 - \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = 1 - \cos(\alpha - \beta)$

121

$1 - \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = 1 - \cos(\alpha - \beta)$

Restando 1 a ambos miembros:

⌊_____⌋

$-\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = -\cos(\alpha - \beta)$

122

$-\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = -\cos(\alpha-\beta)$

Multiplicando por (−1) ambos miembros:

$\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \cos(\alpha-\beta)$

123

Obtenemos por simetría:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

124

La identidad

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

nos va a permitir
derivar
un conjunto de otras
importantes identidades.

125

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

Hagamos la sustitución $\beta = -\beta'$:

$\cos[\alpha - (-\beta')] = \cos(\alpha + \beta')$
$= \cos\alpha\cos(-\beta') + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta')$

126

$\cos(\alpha + \beta') = \cos\alpha\cos(-\beta') + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta')$

pero recordemos que $\cos(-\beta') =$ ____ ; $\operatorname{sen}(-\beta') =$ ____ en términos de β'

$\cos\beta'$

$-\operatorname{sen}\beta'$

por lo tanto:

$\cos(\alpha + \beta') =$ ____

$\cos\alpha\cos\beta' + \operatorname{sen}\alpha(-\operatorname{sen}\beta')$
o bien
$\cos\alpha\cos\beta' - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta'$

127

Hemos obtenido la identidad

$$\cos(\alpha + \beta') = \cos\alpha\cos\beta' - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta'$$

que podemos, desde luego, escribir así:

$$\mathbf{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$
$$\alpha, \beta \in \mathcal{R}$$

128

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

Efectuemos ahora, la sustitución

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha'$$

$\_\_\_\_\_$

$$\cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right) + \beta\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right)\cos\beta - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right)\operatorname{sen}\beta$$

129

$$\cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right) + \beta\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right)\cos\beta - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right)\operatorname{sen}\beta$$

pero $\quad \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right) + \beta\right] = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\alpha' - \beta\right)\right]$

y recordamos que

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right) =$ $\_\_\_\_\_$

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right) =$ $\_\_\_\_\_$

$\operatorname{sen}\alpha'$

$\cos\alpha'$

130

Sustituyendo lo que hemos encontrado, tenemos:

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha' - \beta)\right] = \operatorname{sen}\alpha'\cos\beta - \cos\alpha'\operatorname{sen}\beta$$

$\_\_\_\_\_$

$\_\_\_\_\_ = \operatorname{sen}\alpha'\cos\beta - \cos\alpha'\operatorname{sen}\beta$

Por la misma identidad que hemos utilizado en el cuadro anterior.

$\operatorname{sen}(\alpha' - \beta)$

131

Obtenemos la identidad

$$\text{sen}(\alpha' - \beta) = \text{sen}\alpha'\cos\beta - \cos\alpha'\text{sen}\beta$$

que escribimos así:

$$\textbf{sen}(\alpha - \beta) = \textbf{sen}\alpha\textbf{cos}\beta - \textbf{cos}\alpha\textbf{sen}\beta$$

132

En

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\text{sen}\beta$$

hagamos la sustitución $\beta = -\beta'$

$$\text{sen}[\alpha - (-\beta')] = \text{sen}\alpha\cos(-\beta') - \cos\alpha\text{sen}(-\beta')$$

133

$\text{sen}[\alpha - (-\beta')] = \text{sen}\alpha\cos(-\beta') - \cos\alpha\text{sen}(-\beta')$

pero:

$\text{sen}[\alpha - (-\beta') =$ $\text{sen}(\alpha + \beta')$

$\cos(-\beta') =$ $\cos\beta'$

$\text{sen}(-\beta') =$ $-\text{sen}\,\beta'$

134

Por sustitución,
obtenemos la identidad

$$\text{sen}(\alpha + \beta') = \text{sen}\,\alpha \cos \beta' - \cos \alpha(-\text{sen}\,\beta')$$

o bien

$$\text{sen}(\alpha + \beta') = \text{sen}\,\alpha \cos \beta' + \cos \alpha\, \text{sen}\,\beta'$$

que escribimos así:

$$\textbf{sen}(\alpha + \beta) = \textbf{sen}\,\alpha\, \textbf{cos}\,\beta + \textbf{cos}\,\alpha\, \textbf{sen}\,\beta.$$

135

En síntesis:

$$\textbf{sen}(\alpha + \beta) = \textbf{sen}\,\alpha\, \textbf{cos}\,\beta + \textbf{cos}\,\alpha\, \textbf{sen}\,\beta$$

$$\textbf{sen}(\alpha - \beta) = \textbf{sen}\,\alpha\, \textbf{cos}\,\beta - \textbf{cos}\,\alpha\, \textbf{sen}\,\beta$$

$$\textbf{cos}(\alpha + \beta) = \textbf{cos}\,\alpha\, \textbf{cos}\,\beta - \textbf{sen}\,\alpha\, \textbf{sen}\,\beta$$

$$\textbf{cos}(\alpha - \beta) = \textbf{cos}\,\alpha\, \textbf{cos}\,\beta + \textbf{sen}\,\alpha\, \textbf{sen}\,\beta$$

5.6.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* las cuatro identidades fundamentales conteniendo funciones de dos ángulos:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos \beta + \cos \alpha\, \text{sen}\,\beta$$

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos \beta - \cos \alpha\, \text{sen}\,\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen}\,\alpha\, \text{sen}\,\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \text{sen}\,\alpha\, \text{sen}\,\beta.$$

6.6

Identidades de la suma y diferencia de dos ángulos

136

Las cuatro identidades fundamentales conteniendo funciones de dos ángulos.

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta + \cos\alpha \;\text{sen}\,\beta$$

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta - \cos\alpha \,\text{sen}\,\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\,\alpha \,\text{sen}\,\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \text{sen}\,\alpha \,\text{sen}\,\beta$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

137

Vamos, ahora, a tratar de obtener

$$\textbf{tan}(\alpha + \beta) = f(\textbf{tan}\,\alpha, \textbf{tan}\,\beta)$$

a partir de las identidades para $\text{sen}(\alpha + \beta)$ y $\cos(\alpha + \beta)$.

138

De acuerdo con la identidad 4:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$

139

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \quad \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

140

Entonces,

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

Observamos que
al dividir entre **cos** α **cos** β
el numerador y el denominador del segundo miembro,
obtenemos una expresión
en términos de tan α y tan β únicamente.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

141

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

$\alpha, \beta \in$ [ ]

Escribámoslo así:

$\mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$ $k \in \mathbb{Z}$

142

Obtengamos, ahora $\tan(\alpha - \beta) = f(\tan\alpha, \tan\beta)$

$\tan(\alpha - \beta) =$ [ ]

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

dividiendo numerador y denominador entre $\cos\alpha\cos\beta$:

- $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

Podemos obtener este mismo resultado, sustituyendo en la expresión para $\tan(\alpha + \beta)$, β por $-\beta$.

143

Obtener $\cot(\alpha + \beta) = f(\cot\alpha, \cot\beta)$

$\cot(\alpha + \beta) =$ [ ]

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$$

$$= \frac{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

dividiendo entre $\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$ numerador y denominador:

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$$

144

Obtener $\cot(\alpha - \beta) = f(\cot\alpha, \cot\beta)$

$\cot(\alpha - \beta) =$ ⌊_____⌋

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$$

haciendo la sustitución β por $-\beta$

$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot\alpha\cot(-\beta) - 1}{\cot(-\beta) + \cot\alpha}$$

- $\cot(\alpha - \beta) = \dfrac{-\cot\alpha\cot\beta - 1}{-\cot\beta + \cot\alpha}$

  o bien:

  $\mathbf{\cot(\alpha - \beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\alpha - \cot\beta}}$

145

Resumen 10. Identidades trigonométricas.

Suma o diferencia de dos ángulos:

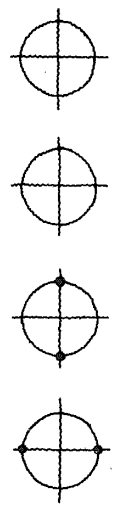
9. $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ • $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

10. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$ • $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

11. $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$ • $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \wedge \alpha, \beta \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$

12. $\cot(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\alpha \pm \cot\beta}$ • $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \wedge \alpha, \beta \neq k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$



5.6.6.1

Práctica adicional de aplicación
de las
identidades de la suma o diferencia
de dos ángulos,
si se considera necesario.

5.6.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *dar* las identidades trigonométricas para la suma o diferencia de dos ángulos;
- *aplicar* las identidades para la suma o diferencia de dos ángulos.

6.7

Identidades del "ángulo doble" y del "ángulo mitad"

146

Sabemos que

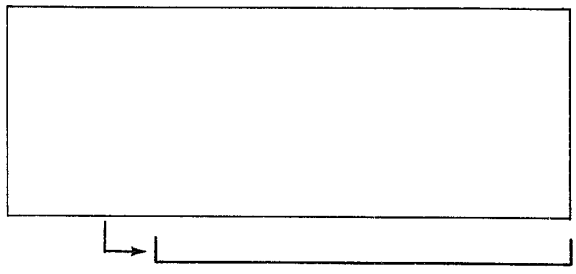
$\text{sen}(\alpha + \beta) =$ ____

$\text{sen}\,\alpha \cos\beta + \cos\alpha \,\text{sen}\,\beta$

147

$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta + \cos\alpha \,\text{sen}\,\beta$

Hagamos la sustitución $x = \alpha = \beta$
simplificando la expresión resultante:



$\text{sen}(x + x) = \text{sen}\,x \cos x + \cos x \,\text{sen}\,x$

$\text{sen}\,2x = \text{sen}\,x \cos x + \text{sen}\,x \cos x$

$\text{sen}\,2x = 2\,\text{sen}\,x \cos x$

148

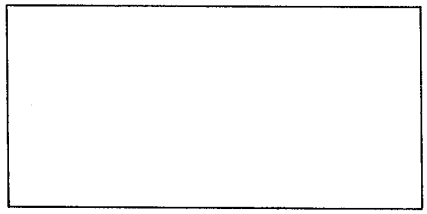
$\cos(\alpha + \beta) =$ ⌊_____⌋

$\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

149

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

Efectuemos la sustitución $\mathbf{x} = \alpha = \beta$
simplificando la expresión resultante:



⌊_____⌋

$\cos(x + x) = \cos x \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x$

$\mathbf{\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}$

150

Hemos obtenido $\mathbf{\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}$.
Si queremos expresar el segundo miembro
en términos de **cos x** únicamente,
hacemos la sustitución basada en la
identidad 6:

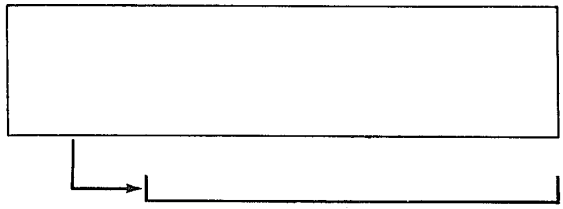
$\operatorname{sen}^2 x =$ ⌊_____⌋

$1 - \cos^2 x$

151

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

pero como $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$
obtenemos, por sustitución y simplificación:



$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$

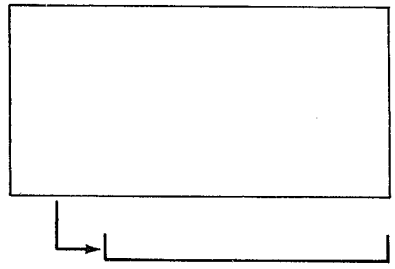
$\cos 2x = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

152

$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

Si queremos expresar el segundo miembro
en términos de **sen x** únicamente, escribimos:



$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

pero $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

$\cos 2x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$
$\quad - \operatorname{sen}^2 x$

$\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

153

Resumen de
las tres expresiones que hemos obtenido
para **cos 2x**:

$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$	• $x \in$ ⌊____⌋
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$	• $x \in$ ⌊____⌋
$\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$	• $x \in$ ⌊____⌋

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$

154

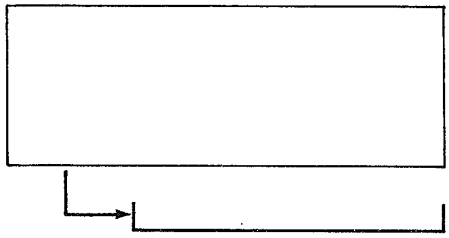
$\tan(\alpha + \beta) =$ ____

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

155

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

Obtengamos, a partir de esta expresión, una identidad para tan 2x:

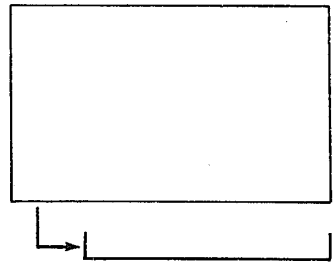


$$\tan 2x = \frac{\tan x + \tan x}{1 - \tan x \tan x}$$

$$\mathbf{\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}}$$

156

Obtener: **cot 2x = f(cot x)**



$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

haciendo $x = \alpha = \beta$

$$\cot 2x = \frac{\cot x \cot x - 1}{\cot x + \cot x}$$

$$\mathbf{\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}}$$

157

Resumen 11. Identidades trigonométricas del ángulo doble

13. $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ • $x \in$ ⌊_____⌋

14.1. $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ • $x \in$ ⌊_____⌋

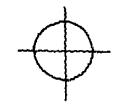
14.2. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ • $x \in$ ⌊_____⌋

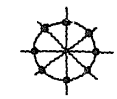
14.3. $\cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$ • $x \in$ ⌊_____⌋

15. $\tan 2x = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ • $x \in$ ⌊_____⌋

16. $\cot 2x = \dfrac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}$ • $x \in$ ⌊_____⌋

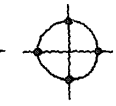
$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$





$\mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$

$\mathbb{R} \wedge x \neq \frac{k\pi}{2}$ →



$k \in \mathbb{Z}$

5.6.7.1

Práctica adicional
de
aplicación de las
identidades del
"ángulo doble",
si se considera necesario.

158

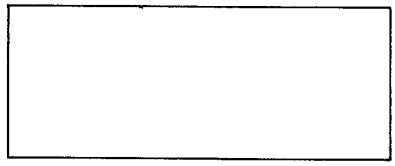
$\cos 2x = f(\operatorname{sen} x) =$ ⌊_____⌋

$1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$

159

$\cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2 x$

Despejemos **sen x**:



sen x = [ ]

$2\,\text{sen}^2 x = 1 - \cos 2x$

$\text{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

$\text{sen } x = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos 2x}{2}}$

160

$$\text{sen } x = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$$

Hagamos, ahora, la sustitución $2x = x'$

y por lo tanto: $x = \dfrac{x'}{2}$

[ ]

$$\text{sen } \frac{x'}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x'}{2}}$$

161

Obtenemos $\text{sen } \dfrac{x'}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos x'}{2}}$

que podemos escribir así:

$$\text{sen } \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$x \in$ [ ]

$\mathbb{R}$

162

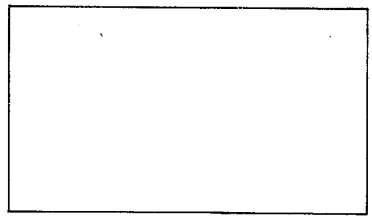
$\cos 2x = f(\cos x) =$ [ ]

$2\cos^2 x - 1$

163

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

Despejamos **cos x**:



$\cos x =$ [ ]

$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$

$\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

$\cos x = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos 2x}{2}}$

164

$\cos x = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos 2x}{2}}$

Efectuando la sustitución $2x = x'$

y por lo tanto: $x = \dfrac{x'}{2}$

se obtiene:

[ ]

$\cos \dfrac{x'}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos x'}{2}}$

165

La expresión obtenida:

$$\cos \frac{x'}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x'}{2}}$$

podemos escribirla así:

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

166

De $\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$

y

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

Podemos obtener:

$\tan \frac{x}{2} =$ [ ]

- $\tan \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}}$$

- **$\tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$**

167

De

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

y

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

o bien de:

$$\tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

podemos obtener: $\cot \frac{x}{2} =$ [ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\cot\frac{x}{2} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \qquad \cot\frac{x}{2} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}}$$

$$\boldsymbol{\cot\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}}$$

o bien:

$$\cot\frac{x}{2} = \frac{1}{\tan\frac{x}{2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}} = \frac{1}{\frac{\pm\sqrt{1-\cos x}}{\pm\sqrt{1+\cos x}}}$$

$$\boldsymbol{\cot\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}}$$

168

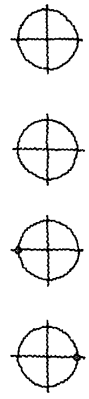
Resumen 12. Identidades trigonométricas del "ángulo mitad".

17. $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ • $x \in$ ℜ

18. $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ • $x \in$ ℜ

19. $\tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ • $x \in \mathfrak{R} \wedge x \neq (2k+1)\pi$

20. $\cot\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ • $x \in \mathfrak{R} \wedge x \neq 2k\pi$



5.6.7.2

Práctica adicional
de
aplicación de las identidades
del "ángulo doble" y del
"ángulo mitad",
si se considera necesario.

5.6.7

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* las identidades del "ángulo doble"

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$
$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$
$$\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$
$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$
$$\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x} \; ;$$

- *obtener* las identidades del "ángulo mitad"

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

$$\cot \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$$

6.8

Identidades de sumas y productos

169

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) =$ ⌊ ⌋

$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) =$ ⌊ ⌋

$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

170

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

Sumando miembro a miembro las dos igualdades, obtenemos la identidad

⌊ ⌋

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$

171

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$

$\alpha, \beta \in$ [ ]

$\mathbb{R}$

172

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) =$ [ ]

$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) =$ [ ]

$\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$

$\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$

173

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$

$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$

Restando miembro a miembro las dos igualdades, se obtiene esta otra identidad

[ ]

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$

174

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$

$\alpha, \beta \in$ [ ]

$\mathbb{R}$

175

$\cos(\alpha + \beta) =$ [ ]

$\cos(\alpha - \beta) =$ [ ]

$\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

$\cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

176

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

Por suma miembro a miembro, obtenemos:

[ ]

Y por resta miembro a miembro:

[ ]

$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$

$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} \beta$

177

Escribamos juntas las cuatro identidades obtenidas:

21. $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$

22. $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$

23. $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$

24. $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

178

En la identidad 21:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$$

Vamos a efectuar la sustitución $\begin{cases} \boxed{A = \alpha + \beta} \\ \boxed{B = \alpha - \beta} \end{cases}$

de donde $\begin{cases} \alpha = \text{\_\_\_\_\_} \\ \beta = \text{\_\_\_\_\_} \end{cases}$

Por suma miembro a miembro:

$A + B = 2\alpha$ de donde $\alpha = \dfrac{A + B}{2}$

Por resta miembro a miembro:

$A - B = 2\beta$

de donde $\longrightarrow \beta = \dfrac{A - B}{2}$

$\dfrac{A + B}{2}$

$\dfrac{A - B}{2}$

179

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$

Sustituyendo $\begin{cases} \alpha + \beta = A \\ \alpha - \beta = B \\ \alpha = \dfrac{A + B}{2} \\ \beta = \dfrac{A - B}{2} \end{cases}$

tenemos:

_____

sen A + sen B

$= 2 \operatorname{sen} \dfrac{A + B}{2} \cos \dfrac{A - B}{2}$

180

Por sustitución de

$$\begin{cases} \alpha + \beta = A \\ \alpha - \beta = B \\ \alpha = \dfrac{A + B}{2} \\ \beta = \dfrac{A - B}{2} \end{cases}$$

en la identidad 22, $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$ obtenemos la nueva identidad:

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \operatorname{sen} \frac{A - B}{2}$$

181

Identidad 23: $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$

Sustitución →

$$\begin{cases} \alpha + \beta = A \\ \alpha - \beta = B \\ \alpha = \dfrac{A + B}{2} \\ \beta = \dfrac{A - B}{2} \end{cases}$$

Nueva identidad:

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}$$

182

Identidad 24: $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

Sustitución →

$$\begin{cases} \alpha + \beta = A \\ \alpha - \beta = B \\ \alpha = \dfrac{A + B}{2} \\ \beta = \dfrac{A - B}{2} \end{cases}$$

Nueva identidad:

$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{A + B}{2} \operatorname{sen} \frac{A - B}{2}$$

183

Resumen de las cuatro últimas identidades rescritas en términos de α y β:

25. $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

26. $\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

27. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

28. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\alpha, \beta \in$ [ ]

$\mathcal{R}$

184

Resumen 13. Identidades trigonométricas de sumas y productos.

21. $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$

22. $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\,2\cos\beta$

23. $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

24. $\cos(\alpha+\beta) \quad \cos(\alpha-\beta) = -2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

25. $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

26. $\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

27. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

28. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\alpha, \beta \in \mathcal{R}$

185

A partir de las identidades básicas
que hemos estudiado,
es posible obtener
un infinito número de nuevas
identidades.

5.6.8.1

Práctica adicional
de
aplicación de las identidades de
sumas y productos,
si se considera necesario.

5.6.8.2

Práctica adicional
de
demostración de una identidad
dada, con ayuda de
las identidades estudiadas,
si se considera necesario.

5.6.8.3

Práctica adicional
de
obtención de nuevas identidades
a partir
de las ya conocidas,
si se considera necesario.

5.6.8

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* las identidades de sumas y productos:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2};$$

- *demostrar* una identidad dada, con ayuda de las identidades estudiadas;

- *obtener* nuevas identidades, a partir de las conocidas.